Un modèle spatio-temporel d'équilibre général pour l'évaluation des effets des investissements d'infrastructure liés au "Grand Paris" (*)

Jean MERCENIER [1]

(Décembre 2013)

Résumé

Le modèle *Pirandello* (Delons *et al* (2008), Kryvobokov *et al* (2012)) constitue une première étape dans le développement d'un cadre d'analyse quantitatif opérationnel, pour la région Ile-de-France, intégrant un modèle élaboré de transports et un modèle de choix de localisation en zone urbaine (modèle du type *LUTI*). L'approche de *Pirandello* reste cependant essentiellement encrée dans l'équilibre partiel. Ce papier cherche à compléter les développements novateurs du modèle *Pirandello* en proposant une généralisation opérationnelle d'équilibre général dans lequel le choix d'implantation ne constitue qu'une parmi beaucoup d'autres décisions faites par les agents, et dans laquelle par conséquent le calcul du prix d'équilibre de l'immobilier ne peut se faire que simultanément avec la recherche de l'équilibre sur l'ensemble des autres marchés, tout en assurant la cohérence stocks - flux imposée par les choix et les contraintes intertemporels des agents.

(*) Je tiens à exprimer mes remerciements à l'équipe *Pirandello*, et tout particulièrement à Jean Delons, pour les discussions et commentaires qui ont contribué significativement la réflexion ayant abouti à ce texte. Bien évidemment, je suis seul responsable du contenu et d'éventuelles erreurs.

[1] Professeur,
Université Panthéon-Assas (Paris 2), 92 rue Assas, Paris 75006.
Tél : 33-1 44 41 58 39
Adresse mail: Jean.Mercenier@u-paris2.fr

Introduction

La gestion d'un espace urbain comme celui de la région Ile-de-France est indispensable afin d'en assurer la saine croissance. Elle est rendue d'autant plus complexe qu'elle ne peut être que décentralisée: pour qu'il y ait évolution dans le sens jugé souhaitable par les responsables politiques, il faut que les agents individuels aient des incitations à évoluer dans ce même sens. Il est donc indispensable pour les pouvoirs publics de disposer d'un outil permettant d'évaluer quantitativement comment leurs actions sont susceptibles d'affecter les incitations auxquelles les agents individuels sont exposés d'une part, et comment ces agents, ménages et firmes, sont susceptibles de modifier leurs comportements en réponse à ces changements de signaux, d'autre part. La tâche est rendue complexe du fait que si les signaux influencent les comportements individuels, l'agrégation de l'ajustement des comportements individuels rétroagira sur ces incitations en en modifiant aussi bien la taille que la nature. Une approche d'équilibre général est donc indispensable, c'est-à-dire une approche qui assure la cohérence entre l'ensemble des choix individuels conditionnés par les signaux du marché d'une part, et d'autre part les signaux résultant de l'agrégation de ces décisions individuelles.

Le modèle *Pirandello* (voir par ex. Delons *et al* (2008), Kryvobokov *et al* (2012)) qui a ses racines dans la théorie de l'accessibilité, intègre partiellement ces idées dans la mesure où il construit une représentation de l'agglomération en imposant que celle-ci soit en équilibre, c'est-à-dire que les signaux calculés sont tels qu'ils assurent l'égalité des demandes et des offres, et que simultanément aucun agent individuel n'a d'incitation à modifier ses choix. Plus précisément, *Pirandello* simule --et ce, de façon extrêmement précise par une utilisation tant des données détaillées les plus récentes, que des modèles de transport les plus sophistiqués-- le comportement des ménages et des entreprises comme celui d'un choix discret d'implantation géographique visant à maximiser leurs objectifs individuels (respectivement leurs flux de bien-être et de profits) tout en imposant un mécanisme de formation des prix de l'immobilier qui assure l'adéquation entre les demandes exprimées et les ressources disponibles. Il s'agit donc bien d'une première étape novatrice, dans la recherche d'un cadre d'analyse opérationnel d'équilibre plus général dans lequel le choix d'implantation ne constitue qu'une parmi beaucoup d'autres décisions faites par les agents, et dans laquelle par conséquent le calcul du prix d'équilibre de l'immobilier ne peut se faire que simultanément avec la recherche de l'équilibre sur l'ensemble des autres marchés. Ce papier cherche à compléter les développements novateurs du modèle *Pirandello* en proposant une telle généralisation. Les caractéristiques principales du modèle d'équilibre général seront résumées informellement dans la prochaine section ; la présentation formelle du modèle fait l'objet de la *Section 3*. Dans la *Section 4* sont discutées certaines extensions possibles.

Section 2 : Présentation informelle du modèle

Le modèle proposé distingue deux périodes: le court et le long terme. A court terme, l'état de l'économie est conditionné par certains aspects de son passé --dont en particulier l'état de ses stocks-- mais aussi par certaines rigidités causes d'inertie (pour un individu, les coût d'ajustements sont en général d'autant plus grands que ces changements sont rapides, ce qui induit à différer les réactions). A long terme par contre, aucune contrainte ne peut plus peser sur le niveau des stocks ni empêcher les ajustements d'être accomplis de sorte que l'économie atteint un état stationnaire. Il s'agit d'***un modèle d'équilibre général intertemporel*** du fait que l'équilibre est déterminé simultanément sur les deux périodes.

Le modèle détermine donc simultanément l'équilibre en flux (par le calcul du système des prix/incitations intra-périodes) et l'équilibre en stocks (par le calcul des prix relatifs intertemporels), en assurant la ***cohérence des stocks et des flux***. Il permet, par exemple, de déterminer de façon cohérente les loyers d'une période (équilibre du marché locatif) et les prix du bâti (équilibre du marché des stocks d'actifs immobiliers); ou encore, de déterminer le coût de la construction et la quantité de terres agricoles qui seront bâties (et partant, le niveau du stock immobilier).

Le lien entre les deux périodes est assuré par le fait que le comportement des agents n'est plus déterminé période par période sous contrainte budgétaires (contraintes en flux); ***les choix sont ici intertemporels***, faits sur les deux périodes simultanément ***sous contrainte de richesse*** (contrainte cohérente stocks/flux). La modélisation ***des anticipations*** que les agents forment du future, et la façon dont ils utilisent ces anticipations dans leurs choix présents, est une caractéristique essentielle de l'approche: tout changement exogène anticipé en seconde période aura des conséquences qui seront anticipées par les agents et intégrées dans leurs choix comportementaux de plus court terme. Des investissements d'infrastructure en seconde période auront donc des effets avant qu'ils soient réalisés, du fait que les agents chercheront à s'ajuster dès la première période de façon à améliorer leur positionnement face à cet environnement futur nouveau. Ceci affectera non seulement les flux d'offre et de demande à court terme (de logement par exemple), mais aussi leurs ***choix de portefeuilles financiers*** puisque l'immobilier n'est qu'un parmi les nombreux types d'actifs patrimoniaux auxquels les agents ont accès, et que les prix de tous ces actifs sont liés du fait que leurs taux de rendements anticipés ne peuvent être différents en équilibre. Le modèle distingue ***six stocks d'actifs différents***, et donc six marchés d'actifs: les obligations étrangères, celles émises par les pouvoirs publics locaux, le capital productif, l'immobilier construit, les terres agricoles non-constructibles, et enfin les terres agricoles constructibles mais non encore bâties. Le modèle permet de déterminer l'ensemble des prix tels que ces stocks soient effectivement désirés, et donc détenus.

Tous les ménages --*Pirandello* distingue x classes de ménages, chacune pouvant être représentée par un ménage agrégé-- ne jouissent pas d'un même niveau de richesse, ni d'un portefeuille d'avoirs de même composition, de sorte qu'ils ne seront pas affectés de manière identique par les changements de prix des actifs. Si le modèle permet une quantification de ces effets de richesses dus aux revalorisations des avoirs, ceux-ci ne représentent évidemment qu'une fraction des gains ou pertes potentielles en bien-être. Pour être rigoureuse, l'analyse de bien-être doit aussi prendre en compte, pour chaque classe socio-économique, (a) tous les changements de prix (tant du côté des dépenses --prix des biens de consommation et prix des logements-- que du côté des revenus --prix des facteurs de production; ainsi que (b) la capacité du ménage à ajuster ses demandes de biens et ses offres de facteurs aux nouveaux prix relatifs. Pour cela, ***les préférences intra-périodes des ménages sont définies sur un ensemble de biens de consommation --le modèle est multi sectoriel-- ainsi que sur différents types de logements auxquels le ménage peut avoir accès*** (tailles, localisation, HLM ou non). Les valorisations relatives de ces différents logements (en fonction entre autre de leur accessibilité et attractivité) constituent un des deux blocs majeurs de *Pirandello*, bloc qui peut être intégralement intégré ici. Le coût du logement est double: au coût direct (loyer et taxe d'habitation) s'ajoute un coût indirect sous la forme d'une perte d'efficacité au travail et donc de salaire, du fait du lieu d'habitation (fatigue et retards dus aux longs déplacements, grèves des transports, voir discrimination à l'embauche). *Pirandello* offre une expression déjà fort élaborée de cet indice d'efficacité qui deviendra ici endogène.

Les ménages sont aussi offreurs sur les marchés des facteurs de production. Outre les services de capital, de terre et d'espace immobilier qu'ils louent aux entreprises, les ménages offrent du travail. Si ***l'offre*** agrégée ***de travail*** est exogène dans le modèle de la *Section 2* --la *Section 3* discute de certaines extensions possibles-- elle ***est désagrégée par type de qualifications et/ou de catégories socio professionnelles*** et sa composition peut varier en fonction des changements relatifs de salaires entre types de travail. Cette désagrégation du facteur travail est importante pour capter les effets redistributifs réels entre travailleurs, effets aussi bien directs (variations des salaires relatifs suite aux changements des volumes sectoriels d'activité) qu'indirects (coûts induits par les changements de localisation sectorielles des activités qui modifient les distances entre lieu d'habitation et lieu d'emploi).

La technologie des firmes est donc différenciée par secteurs d'activités, offrant une description détaillée de la structure des coûts. ***Les firmes concurrentielles ajustent simultanément l'ensemble de leurs choix d'intrants de façon à minimiser leurs coûts de production***. Parmi ces choix figure le ***choix de la localisation géographique optimale*** de l'activité, localisation qui dépend tant des coûts directs (loyers et taxes) que des coûts indirects liés à l'accessibilité. Ce choix, discrets multinomial logit, constitue le second bloc majeur de *Pirandello* et peut être repris intégralement ici.

Une partie de la production des firmes de l'Ile-de-France est exportée ailleurs en France ou à l'étranger (càd au reste-de-monde), et une partie de ses demandes finale et intermédiaires sont importées du reste-de-monde. Tous les secteurs d'activités ne sont pas également exposés à la pression concurrentielle des firmes étrangères sur le marché de leurs produits, et un changement de coût d'un intrant affectera différemment la compétitivité des producteurs, du fait des différences de technologies utilisées. Le volume ainsi que la composition de l'activité en Ile-de-France pourraient donc être sensiblement affectées par les effets induits sur le système des prix des décisions publiques d'investissement en infrastructure. Le modèle permet de capter cette dimension en traitant ***la région*** comme ***une petite économie ouverte au sens de l'économie internationale***.

Enfin, le modèle permet une évaluation rigoureuse des effets de bien-être, pour chaque classe socio-économique, à partir des fonctions d'utilité intertemporelle. ***Le critère de bien-être est défini à l'aide d'une condition d'indifférence intertemporelle*** qui mesure le pourcentage de félicité additionnel qu'il faudrait donner au ménage sur l'ensemble de l'horizon pour qu'il soit indifférent entre sa situation initiale et celle d'après l'implémentation de la politique. Ce critère prend donc bien ainsi en compte aussi bien les effets de court terme (transitoires) que les effets de long terme (permanents) du choc sous étude.

Section 3 : Présentation formelle du modèle

0. Le temps

On travail en temps discret, noté t.
L'équilibre intertemporel est déterminé sur deux périodes: le court terme (t_1) et le long terme (t_2). Les variables en t_0 constituent le passé réalisé, et la stationnarité est atteinte en t_2, de sorte que le niveau des variables après t_2 est le même qu'en t_2.
Du fait de la discrétisation du temps, une convention d'écriture relative à l'accumulation des stocks est nécessaire. On supposera qu'une variable de stock indicée t indique le niveau du stock en début de période t susceptible de se modifier et de produire au cours de la période t, et acquis en fin de période $t-1$ aux conditions de marchés qui prévalent en $t-1$.

1. Stocks d'actifs et composition de la richesse agrégée des ménages

Notons $Portf_{t+1}$ la valeur agrégée du portefeuille patrimonial (hors capital humain) détenu par l'ensemble des ménages en début de $t+1$. Le niveau de cette richesse résulte des décisions d'épargne passées, décisions qui seront détaillées dans la section suivante et nous considérons ici ce niveau donné pour nous intéresser à sa composition.
On distingue six types d'actifs dans le portefeuille des ménages: les obligations étrangères, celles émises par les pouvoirs publics locaux,[2] le capital productif, l'immobilier construit, les terres agricoles non-constructibles, et enfin les terres agricoles constructibles mais non encore bâties. A l'équilibre, tous les actifs qui sont détenus en $t+1$ le seront à condition qu'ils assurent aux acquéreurs en t des taux de rendements anticipés égaux. Afin de faciliter la comptabilité des agents, on supposera que les ménages domestiques possèdent l'intégralité du capital, du parc immobilier ainsi que des terres; cette hypothèse commode n'affecte nullement les résultats pour des raisons qui seront clarifiées ci-après.[3]
Les obligations détenues en début de $t+1$, respectivement en quantités B_{t+1}^{Rdm} et B_{t+1}^{Gov} (Rdm = le reste du monde; Gov = les pouvoirs publics), ont été émises en t avec une valeur faciale unitaire de p_t^{Rdm} et p_t^{Gov} respectivement; elles produisent contractuellement un revenu proportionnel à cette valeur faciale, et sont vendus lors de l'émission aux prix d'équilibre du marché à cette date t, de sorte que leurs taux

[2] Nous traiterons les pouvoirs publics locaux comme un agent autonome, en négligeant en particulier l'interaction avec l'Etat central, celle-ci étant purement comptable, essentiellement exogène, et sans intérêt particulier en ce qui nous concerne. Une architecture plus sophistiquée de la contrainte budgétaire des pouvoirs publics peut bien évidemment être modélisée sans aucune difficulté conceptuelle.
[3] Elle implique cependant que les avoirs sur le reste du monde peuvent être négatifs, ce qui ne pose aucun problème.

de rendement bruts, notés $1+r_t^{Rdm}$ et $1+r_t^{Gov}$, sont connus avec certitude lors de l'acquisition (raison pour laquelle ces taux sont indicés t). On peut donc indifféremment s'intéresser à la détermination des prix d'équilibre de ces bons à l'émission, ou à celle de leurs taux de rendement, comme nous le ferons.
Le stock de capital K_{t+1} produira au cours de la période un flux de service de facteur supposé proportionnel au stock, soit $\kappa^K K_{t+1}$. Ce service sera vendu au prix unitaire anticipé w_{t+1}^K. Le stock de capital est acquis en t au prix unitaire p_t^K et sa valeur unitaire de revente anticipée une période plus tard est $p_{t+1}^K\left(1-\delta^K\right)$ du fait de la dépréciation. Le taux de rendement attendu en t sur cet actif s'écrit donc:

$$(1.1)\qquad 1+r_{t+1}^K=\frac{w_{t+1}^K\kappa^K+\left(1-\delta^K\right)p_{t+1}^K}{p_t^K}.$$

Ce taux n'est connu qu'en $t+1$ (raison pour laquelle on l'indice $t+1$) et est donc anticipé lors de l'achat de l'actif en t.[4] De la même façon, on peut écrire le taux de rendement pour $t+1$ de l'actif immobilier tel qu'anticipé au moment de son acquisition en t, comme:

$$(1.2)\qquad 1+r_{t+1}^{Imm}=\frac{\varpi_{t+1}^{Imm}\kappa^{Imm}+p_{t+1}^{Imm}}{p_t^{Imm}}$$

où ϖ_{t+1}^{Imm} est le loyer anticipé de $t+1$, et κ^{Imm} converti le stock immobilier Imm_t en flux de services (de logement pour les ménages et d'espace professionnel pour les firmes) et p_t^{Imm} le prix de l'immobilier en t. On pourrait sans difficulté introduire ici aussi une hypothèse de dépréciation, comme on l'a fait pour le capital.
Le taux de rendement attendu sur les terres agricoles détenues en t s'écrit:

$$(1.3)\qquad 1+r_{t+1}^{TAgri}=\frac{w_{t+1}^{TAgri}\kappa^{TAgri}+p_{t+1}^{TAgri}}{p_t^{TAgri}}$$

où w_{t+1}^{TAgri} est le loyer espéré pour $t+1$ sur la terre agricole, κ^{TAgri} un facteur constant de proportionnalité, p_t^{TAgri} et p_{t+1}^{TAgri} sont respectivement les prix unitaires d'acquisition en t et de revente une période plus tard de ce facteur de production.
Pour le dernier actif, les terres agricoles constructibles mais non encore bâties, les choses sont un peu plus complexes pour l'acquéreur puisqu'il peut choisir de laisser l'actif en l'état, auquel cas le taux de rendement brut attendu sera:

---

[4] Strictement parlant, il faudrait écrire $\hat{r}_{t+1|t}^K$ pour l'anticipation faite en t de r_{t+1}^K; idem pour toutes les variables indicées $t+1$ qui sont des variables anticipées en t. Dans la mesure où dans cette section, nous nous intéressons uniquement aux choix de portefeuilles en t et non aux revenus réalisés par ces portefeuilles en $t+1$, aucune confusion n'est possible. Afin d'alléger les notations, nous simplifions ainsi l'écriture.

(1.4) $1+r_{t+1}^{TàBât}=\dfrac{w_{t+1}^{TAgri}\kappa^{TAgri}+p_{t+1}^{TàBât}}{p_t^{TàBât}}$

où $p_t^{TàBât}$ est le prix unitaire de l'actif "terre à bâtir" en t ; il peut au contraire décider d'investir afin de transformer cette terre en capital immobilier auquel cas le taux de rendement brut attendu sur son actif sera égal à

$$\frac{\varpi_{t+1}^{Imm}\kappa^{Imm}+p_{t+1}^{Imm}}{p_t^{TàBât}+p_t^{Inv^{Imm}}}$$

où le dénominateur est la somme du prix d'acquisition et du coût de la construction immobilière noté $p_t^{Inv^{Imm}}$. Il choisira la seconde option aussi longtemps que ce dernier taux excèdera $1+r_{t+1}^{TàBât}$ de sorte qu'à l'équilibre on doit avoir égalité:

(1.5) $\dfrac{w_{t+1}^{TAgri}\kappa^{TAgri}+p_{t+1}^{TàBât}}{p_t^{TàBât}}=\dfrac{\varpi_{t+1}^{Imm}\kappa^{Imm}+p_{t+1}^{Imm}}{p_t^{TàBât}+p_t^{Inv^{Imm}}}$.

Cette condition de non arbitrage déterminera le volume de l'investissement immobilier Inv_t^{Imm} qui sera réalisé au cours de la période t, ainsi donc que la croissance, entre deux périodes, du stock immobilier (soit $Imm_{t+1}-Imm_t$) au détriment du stock des terres à bâtir (et donc des terres agricoles cultivées).[5]

L'équilibre des portefeuilles requiert que les taux de rendement anticipés sur tous les actifs soient égalisés:

(1.6) $1+r_t^{Rdm}=1+r_t^{Gov}$

(1.7) $\qquad =1+r_{t+1}^{K}$

(1.8) $\qquad =1+r_{t+1}^{Imm}$

(1.9) $\qquad =1+r_{t+1}^{TAgri}$

(1.10) $\qquad =1+r_{t+1}^{TàBat}$

Les ménages sont alors indifférents à la composition de leurs richesses, raison pour laquelle on peut faire abstraction de leur hétérogénéité lors de la détermination des choix de portefeuilles, et travailler avec un seul ménage agrégé dans cette section.[6] On aura alors que

(1.11) $Portf_{t+1}=p_t^{Rdm}B_{t+1}^{Rdm}+p_t^{Gov}B_{t+1}^{Gov}+p_t^{K}K_{t+1}+p_t^{Imm}Imm_{t+1}+p_t^{TAgri}TAgri_{t+1}+p_t^{TàBât}TàBât_{t+1}$.

L'IdF est trop petite pour influencer les taux d'intérêts internationaux de sorte que r_t^{Rdm} est exogène, et peut être supposé constant:

[5] On néglige ici la condition d'irréversibilité, $Inv_t^{Imm}\geq 0$, qui n'a qu'un intérêt théorique.

[6] *Ex post*, par contre, suite à un choc en $t+1$ non anticipé par les spéculateurs en t, les réalisations en $t+1$ seront différentes des valeurs qui ont été anticipées lors des choix, de sorte que pour cette période spécifique, la composition du portefeuille aura de l'importance: elle déterminera l'ampleur des gains réalisés ou des pertes subies du fait des erreurs d'anticipations sur les variables de $t+1$, gains/pertes dont il faudra tenir compte dans l'écriture des contraintes budgétaires des ménages individuels.

(1.12) $r_t^{Rdm} = \overline{r^{Rdm}}$;

le taux de change réel d'équilibre assurera que la contrainte budgétaire consolidée de la région vis à vis du Rdm est satisfaite, càd que le stock B_{t+1}^{Rdm} émis par le Rdm est bien détenu par les ménages.

Les pouvoirs publics locaux financent leur dette par émission de bons; le stock émis B_{t+1}^{Gov} est donc déterminé par leur contrainte budgétaire et sera détenu par les ménages dès lors que la condition (1.6) est satisfaite.

Les loyers ϖ_t^{Imm} étant déterminés par l'équilibre du marché locatif à chaque date, la condition (1.8) détermine la trajectoire temporelle des prix de l'immobilier. Afin de mieux comprendre les implications de cette condition de non arbitrage, réécrivons-la en t_2 ; l'équilibre stationnaire étant alors atteint par hypothèse, on sait que:

$$1 + r_{t_2}^{Rdm} = \frac{\varpi_{t_3}^{Imm}\kappa^{Imm} + p_{t_3}^{Imm}}{p_{t_2}^{Imm}}$$
$$= \frac{\varpi_{t_2}^{Imm}\kappa^{Imm} + p_{t_2}^{Imm}}{p_{t_2}^{Imm}}$$

ce qui détermine $p_{t_2}^{Imm}$. Le niveau d'équilibre de $p_{t_1}^{Imm}$ doit alors satisfaire la condition de non arbitrage conditionnellement aux valeurs futures de $\varpi_{t_2}^{Imm}$ et $p_{t_2}^{Imm}$: [7]

$$1 + r_{t_1}^{Rdm} = \frac{\varpi_{t_2}^{Imm}\kappa^{Imm} + p_{t_2}^{Imm}}{p_{t_1}^{Imm}}.$$

On voit que le prix de l'immobilier réagira dès t_1 à un choc qui n'aura lieu qu'en t_2, mais dont les ménages anticipent dès la première période les conséquences sur la rentabilité future de l'actif. Tous les comportements et donc l'équilibre de première période seront impactés par l'implémentation future des choix politiques du fait des décisions de portefeuilles des ménages, càd via les marchés financiers.

De la même façon, les conditions (1.9) et (1.10) détermineront les changements du niveau des prix des terrains, $p_{t_1}^{TAgri}$ et $p_{t_1}^{TàBât}$, nécessaires pour que ces deux actifs soient détenus, compte tenu des changements anticipés de l'équilibre en seconde période.

Les choses sont légèrement différentes en ce qui concerne K_{t+1} du fait que la valeur d'une unité installée de capital est liée au coût unitaire du capital neuf, càd au prix de l'investissement déterminé ailleurs. L'équation (1.11) détermine résiduellement le niveau du stock de capital productif désiré par les ménages, et partant le niveau de l'investissement nécessaire pour le réaliser, puisque:

---

[7] Techniquement parlant, la condition (1.8) est une équation aux différences en p_t^{Imm} à laquelle on impose une condition terminale par l'hypothèse de stationnarité; l'équation aux différences est intégrée vers l'arrière afin de déterminer la condition initiale requise pour que cette condition terminale soit satisfaite.

(1.13) $K_{t_2} = Inv_{t_1} + \left(1-\delta^K\right)\overline{K}_{t_1}$

où $\overline{K}_{t_1}$ est donné par l'accumulation passée. L'hypothèse de stationnarité, permet alors de déterminer le volume de l'investissement de seconde période:

(1.14) $Inv_{t_2} = \delta^K K_{t_2}$.

2. Les ménages

La population est partitionnée en cellules indicées $h = 1,\cdots,H$. A chaque cellule correspond une classe de revenus $rev\text{-}h = 1,\cdots,Rev\text{-}h$, un type de ménages $type\text{-}h = 1,\cdots,Type\text{-}h$. On a donc $Card(H) = Card(Rev\text{-}h)$ x $Card(Type\text{-}h)$. On s'intéresse au ménage représentatif d'une cellule, d'effectif donné $\overline{Pop}_{h,t}$: toutes les variables et paramètres sont spécifiques au ménage représentatif de la cellule considérée, et donc indicés h .

2.1 Contrainte budgétaire et choix intertemporels

Le flux total de revenus perçus par le ménage h au cours de la période t s'écrit:

(2.1)
$$\begin{aligned} inc_{h,t} = {} & r_{t-1}^{Rdm} p_{t-1}^{Rdm} b_{h,t}^{Rdm} + r_{t-1}^{Gov} p_{t-1}^{Gov} b_{h,t}^{Gov} + \\ & w_t^K \kappa^K k_{h,t} + \varpi_t^{Imm} \kappa^{Imm} imm_{h,t} + w_t^{TAgri} \kappa^{TAgri}\left(tagri_{h,t} + tàbât_{h,t}\right) + inc_{h,t}^{Lab} \end{aligned}$$

où $b_{h,t}^{Rdm}$, $b_{h,t}^{Gov}$, $k_{h,t}$, $imm_{h,t}$, $tagri_{h,t}$, $tàbât_{h,t}$ sont les stocks réels des différents actifs détenus par le ménage, et $inc_{h,t}^{Lab}$ désigne l'ensemble de ses revenus du travail. Le flux d'épargne du ménage durant cette période s'écrit:

(2.2) $sav_{h,t} = inc_{h,t} - \lambda_{h,t}^u u_{h,t} - \overline{tx}_{h,t}^{Inc}$

où $\lambda_{h,t}^u u_{h,t}$ est le flux des dépenses en valeur consenties pour jouir au cours de la période d'un niveau de félicité $u_{h,t}$ au coût unitaire $\lambda_{h,t}^u$, et $\overline{tx}_{h,t}^{Inc}$ est le montant de l'impôt payé sur les revenus (impôt que l'on traite ici comme une exogène, mais que l'on pourrait évidemment supposer fonction de $inc_{h,t}$). La richesse accumulée par le ménage en fin de période t est:

(2.3)
$$\begin{aligned} portf_{h,t+1} = {} & sav_{h,t} + \\ & p_{t-1}^{Rdm} b_{h,t}^{Rdm} + p_{t-1}^{Gov} b_{h,t}^{Gov} + \left(1-\delta^K\right) p_t^K k_{h,t} + p_t^{Imm} imm_{h,t} + p_t^{TAgri} tagri_{h,t} + p_t^{TàBât} tàbât_{h,t} \end{aligned}$$

où $portf_{h,t+1}$ peut s'écrire

$$portf_{h,t+1} = p_t^{Rdm} b_{h,t+1}^{Rdm} + p_t^{Gov} b_{h,t+1}^{Gov} + p_t^K k_{h,t+1} + p_t^{Imm} imm_{h,t+1} + p_t^{TAgri} tagri_{h,t+1} + p_t^{TàBât} tàbât_{h,t+1}$$

bien que le ménage soit indifférent à la structure de son portefeuille futur, et une clef de répartition exogène sera en principe nécessaire pour en fixer la composition.[8]

En utilisant (2.2) et (2.1) pour éliminer $sav_{h,t}$ et $inc_{h,t}$, on obtient après réarrangements l'expression suivante de la contrainte budgétaire intertemporelle du ménage:

$$
\begin{aligned}
portf_{h,t+1} + \lambda^{u}_{h,t} u_{h,t} + \overline{tx}^{Inc}_{h,t} = {} & \\
(2.4) \qquad & \left(1+r^{Rdm}_{t-1}\right) p^{Rdm}_{t-1} b^{Rdm}_{h,t} + \left(1+r^{Gov}_{t-1}\right) p^{Gov}_{t-1} b^{Gov}_{h,t} + \\
& \left[\frac{w^{K}_{t}\kappa^{K} + \left(1-\delta^{K}\right) p^{K}_{t}}{p^{K}_{t-1}}\right] p^{K}_{t-1} k_{h,t} + \left[\frac{\varpi^{Imm}_{t}\kappa^{Imm} + p^{Imm}_{t}}{p^{Imm}_{t-1}}\right] p^{Imm}_{t-1} imm_{h,t} + \\
& \left[\frac{w^{TAgri}_{t}\kappa^{TAgri} + p^{TAgri}_{t}}{p^{TAgri}_{t-1}}\right] p^{TAgri}_{t-1} tagri_{h,t} + \left[\frac{w^{TAgri}_{t}\kappa^{TAgri} + p^{TàBât}_{t}}{p^{TàBât}_{t-1}}\right] p^{TàBât}_{t-1} tàbât_{h,t} + \\
& inc^{Lab}_{h,t} \ .
\end{aligned}
$$

Le membre de droite représente la valeur en t des avoirs patrimoniaux acquis en $t-1$, augmentés de leurs rendements respectifs *réalisés*, auxquels s'ajoutent les revenus du travail. Ces ressources, h les alloue (membre de gauche) entre dépenses de félicité courante et acquisitions patrimoniales, après s'être acquitté de ses obligations fiscales. Cette allocation, il la fait de façon à maximiser son utilité intertemporelle. On suppose que les préférences intertemporelles sont de la forme "à élasticité de substitution constante", soit:

$$(2.5) \qquad U_{h,t} = \sum_{t'=t}^{\infty} \beta^{t'-t} \frac{{u_{h,t'}}^{1-1/\sigma^{U}}}{1-1/\sigma^{U}}$$

où β est un facteur d'escompte psychologique (qui capte le degré d'impatience du ménage), et σ^{U} est le taux de substitution intertemporelle. Le ménage choisit le niveau optimal de sa félicité $u_{h,t'}$ de façon à maximiser (2.5) sous contrainte dynamique d'accumulation de richesse (2.4) en considérant les différents prix comme donnés. La condition du premier ordre impose que:

$$(2.6) \qquad \left[\frac{u_{h,t'+1}}{u_{h,t'}}\right]^{1/\sigma^{U}} = \beta\left(1+r^{Rdm}_{t'}\right)\frac{\lambda^{u}_{h,t'}}{\lambda^{u}_{h,t'+1}} \qquad t' \geq t$$

Cette condition d'Euler détermine, sous forme d'un taux de croissance brut optimal, le profil temporel des $\left\{u_{h,t'}\right\}_{t'=t}^{\infty}$ conditionnellement à la trajectoire dans le temps du coût marginal de la félicité $\left\{\lambda^{u}_{h,t'}\right\}_{t'=t}^{\infty}$, la contrainte de richesse (2.4) déterminant le niveau absolu initial $u_{h,t}$. La stationnarité en t_2 impose

[8] Dans la mesure où nous travaillons sur deux périodes, et que le choc de décision publique a lieu en t_2, la ventilation du portefeuille $portf_{h,t_2}$ entre les différents actifs est en fait inutile. Seule la structure patrimoniale du ménage en t_1 importe, mais celle-ci est réalisée, donc en principe dans les données.

que $u_{h,t_3} = u_{h,t_2}$, $\lambda^u_{h,t_3} = \lambda^u_{h,t_2}$, $portf_{h,t_3} = portf_{h,t_2}$. Il vient dès lors de (2.6) que $\beta\left(1+\overline{r}^{Rdm}\right)=1$. Les équations (2.6) et (2.4) forment alors un système de 3 équations qui déterminent u_{h,t_1}, u_{h,t_2} et $portf_{h,t_2}$.

2.2 Choix intra-temporels

Toutes les variables dans cette sous-section sont de la même période, et on peut par conséquent négliger l'indice de temps afin d'alléger l'écriture.

- ***Structure de la félicité***

Le ménage alloue ses dépenses de félicité $\lambda^u_{h,t} u_{h,t}$ à la consommation de deux paniers agrégés, l'un de biens et l'autre de services d'habitation, en quantités $con_{h\cdot}$ et $hab_{h\cdot}$ respectivement. Pour cela, il procède par minimisation des coûts compte tenu de ses préférences supposées homothétiques,[9] et plus spécifiquement de type CES (*constant elasticity of substitution*): $u_h = \mathrm{CES}(con_{h\cdot}, hab_{h\cdot})$. Soit λ^{con}_h et λ^{hab}_h les coûts unitaires pour h des deux paniers consommés; le choix consiste à

$$(2.7) \quad \underset{\{con_h, hab_h\}}{\mathrm{Min}} \quad \lambda^{con}_h con_{h\cdot} + \lambda^{hab}_h hab_{h\cdot} \qquad \text{s.c.} \qquad u_h = \mathrm{CES}(con_{h\cdot}, hab_{h\cdot})$$

pour un niveau donné quelconque de u_h. Les conditions du premier ordre et la propriété d'homothéticité permettent d'établir sans difficulté (voir annexe) le système de demande optimal, ainsi que le coût marginal de la félicité:

$$(2.8) \quad \begin{cases} con_{h\cdot} = \mathrm{con_h}\left(\dfrac{\lambda^u_h}{\lambda^{con}_h}\right) u_h \\ hab_{h\cdot} = \mathrm{hab_h}\left(\dfrac{\lambda^u_h}{\lambda^{hab}_h}\right) u_h \\ \lambda^u_h = \mathrm{\lambda^u_h}(\lambda^{con}_h, \lambda^{hab}_h) \end{cases}$$

où $\mathrm{con_h}(.)$ et $\mathrm{hab_h}(.)$ sont des fonctions, et λ^u_h est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte, donc le coût marginal de la félicité u_h. Par construction, la contrainte budgétaire est satisfaite, càd que

$$(2.9) \quad \lambda^u_h u_h = \lambda^{con}_h con_{h\cdot} + \lambda^{hab}_h hab_{h\cdot}.$$

[9] L'homothéticité des préférences implique que la structure du panier choisi dépend uniquement des prix relatifs, et non du niveau du revenu. Toutes les préférences adoptées dans ce papier, qui sont des formes plus ou moins particulières de CES, satisfont cette propriété.

Le panier agrégé de biens est lui-même composé par minimisation des coûts compte tenu des préférences: $con_{h\cdot} = \mathrm{CES}(\ldots, con_{h,s}, \ldots)$, où $con_{h,s}$ est la quantité demandée du bien s acheté au prix de marché p_s^{Arm} (prix de marché qui est donc commun à tout h). On a dès lors que

$$(2.10)\quad \begin{cases} con_{h,s} = \mathrm{con}_{\mathrm{h,s}}\left(\dfrac{\lambda_h^{con}}{p_s^{Arm}}\right) con_{h\cdot} \\ \lambda_h^{con} = \lambda_{\mathrm{h}}^{\mathrm{con}}(\cdots, p_s^{Arm}, \cdots) \end{cases}$$

où λ_h^{con} est le coût marginal du panier de consommation con_h, qui satisfait par construction

$$(2.11)\quad \lambda_h^{con} con_{h\cdot} = \sum_s^S p_s^{Arm} con_{h,s} .$$

La détermination de la composition optimale du panier agrégé de services d'habitations du ménage est quelque peu plus subtile, puisqu'elle résulte [de l'agrégation] des choix discrets faits [par les individus hétérogènes de la cellule h] à partir d'une multinomiale logit à trois niveaux: au niveau supérieur est fait le choix de la zone d'habitation; au second niveau est fait le choix entre type de logement, HLM ou non; enfin, au niveau inférieur, le choix de l'option "non-HLM" ouvre la possibilité de choisir la taille du logement. Notons $i = 1, \cdots, I$ l'ensemble complet des choix possibles, soit $I = Z$ x $(T+1)$ où Z désigne le nombre de zones, et T le nombre de tailles disponibles. L'utilité que les individus hétérogènes de cette classe de ménages associent à chaque alternative $i = 1, \cdots, I$ est constituée d'une composante commune $\tilde{u}_{h,i}$ et d'une composante idiosyncratique $\eta_{h,i}^{h'}$, où h' désigne un individu quelconque de la classe h considérée. On suppose :

$$(2.12)\quad \tilde{u}_{h,i} = \varepsilon_{h,i} + u_{h,i}^{espace} + u_{h,i}^{access} - \left(w_i^{Hab} + \overline{tx}_i^{Hab}\right) \qquad i = 1, \cdots, I .$$

Ici, $\varepsilon_{h,i}$ est une constante; les termes $u_{h,i}^{espace}$ et $u_{h,i}^{access}$ sont des variables endogènes captant l'accessibilité et l'attractivité de i, dont *Pirandello* offre une modélisation très élaborée qui peut être greffée ici (et qu'il est inutile de détailler: voir *Pirandello*); enfin, $\left(w_i^{Hab} + \overline{tx}_i^{Hab}\right)$ est le coût unitaire du service du logement i, soit w_i^{Hab} le loyer et $\overline{tx}_i^{Hab}$ la taxe d'habitation (cette dernière que l'on suppose ici ne pas dépendre des caractéristiques de la classe h, uniquement afin de simplifier les expressions). On suppose les termes idiosyncratiques $\eta_{h,i}^{h'}$ des réalisations de variables aléatoires identiquement distribuées Gumbel, avec une structure de corrélation compatible avec un choix multinomial logit à trois niveaux. Il est alors immédiat de déterminer la probabilité $\wp_{h,i}^{hab}$ de choix associée à chaque alternative i, et dès lors la quantité $hab_{h,i}$ demandée par le ménage h d'habitations par zone, type et taille, ainsi que son coût moyen:

(2.13) $hab_{h,i} = \wp^{hab}_{h,i} hab_{h.}$

(2.14) $\lambda_h^{hab} = \sum_i^I \wp^{hab}_{h,i}\left(w_i^{Hab} + \overline{tx}_i^{Hab}\right)$.

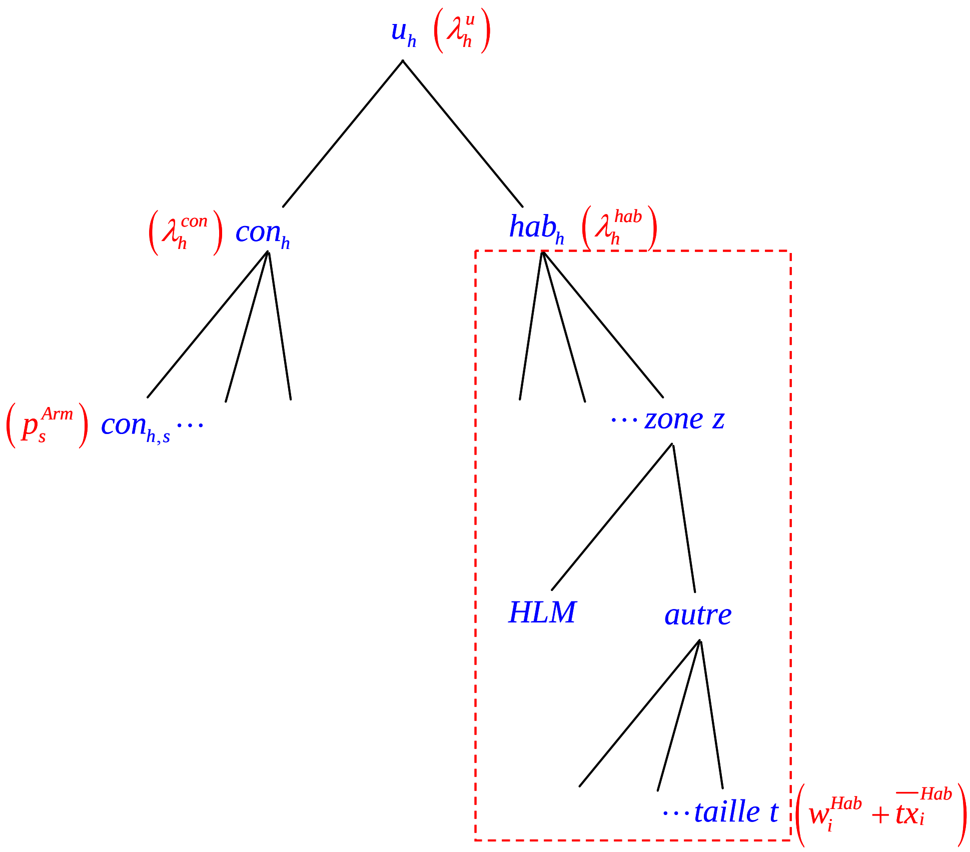
On a par construction que la contrainte budgétaire suivante est satisfaite:

(2.15) $\lambda_h^{hab} hab_h = \sum_i^I \left(w_i^{Hab} + \overline{tx}_i^{Hab}\right) hab_{h,i}$

dont le niveau du membre de gauche est déterminé en (2.8).

La figure 1 décrit la structure des préférences; entre parenthèses sont indiqués les coûts marginaux associés aux différents biens (ou paniers de biens) demandés par le ménage h.[10] Le rectangle en traits hachurés indique ce qui constitue déjà un bloc important de *Pirandello*; en équilibre général cependant, les loyers w_i^{Hab} --ainsi sans doute que certains éléments de $u_{h,i}^{espace}$ et de $u_{h,i}^{access}$ -- sont endogènes.

Figure 1: La structure des préférences des ménages.



[10] Il est maintenant bien connu, suite aux travaux de Anderson et al (1992) que, sous certaines conditions relativement peu restrictives, l'agrégation des choix discrets individuels multinomiaux logit coïncide avec le choix optimal fait par un agent agrégé représentatif à partir de préférence CES: voir Magnani et Mercenier (2009) sur comment calibrer en équilibre général une structure de CES imbriquées à partir des paramètres estimés d'une multinomiale logit à plusieurs niveaux. Les préférences de la figure 1 ont donc la forme d'une structure de CES imbriquées à plusieurs niveaux. Ces CES sont des fonctions additivement séparables de sorte que la structure satisfait les hypothèses de Gorman (1959) et la minimisation des coûts peut bien se faire séquentiellement comme nous l'avons fait pour chaque composite indépendamment en supposant les coûts des intrants donnés lors de chaque optimisation.

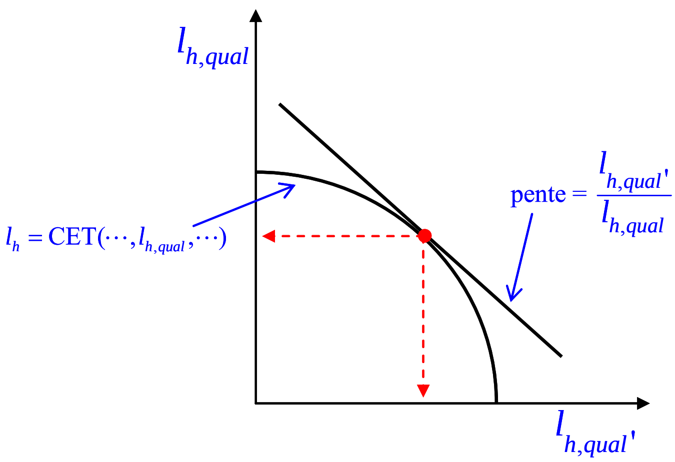
- ***Les offres de services de facteur travail***

Le ménage représentatif détient une quantité fixe de travail l_h qu'il alloue de façon optimale entre différents types de qualifications $l_{h,qual}$ à l'aide d'une technologie CET (*constant elasticity of transformation*, qui a la même forme analytique que la CES mais dont la valeur des paramètres est telle qu'elle est concave et non convexe): $l_h = \mathrm{CET}(\cdots, l_{h,qual}, \cdots)$, de façon a maximiser le revenu tiré de son travail.[11] Ainsi, l'offre optimale de travail de différents niveaux de qualifications réagira aux changements de salaires relatifs. Les conditions du premier ordre prennent la forme suivante:

$$(2.16)\quad \begin{cases} l_{h,qual} = \mathrm{l}_{\mathrm{h,qual}}(\cdots, \varpi_{h,qual}, \cdots) \\ l_h = \sum_{qual}^{Qual} l_{h,qual} \end{cases}$$

où $\varpi_{h,qual}$ est le salaire perçu par unité du facteur travail de qualification $qual$. La figure 2 illustre ce mécanisme.

Figure 2: L'allocation de l'offre de travail enter types de qualifications différents



Le salaire de marché, tel que payé par les firmes pour le service de ce facteur, est mesuré en unité d'efficience, et est supposé ici, pour simplifier, indépendant du secteur de la firme ainsi que de sa zone d'activité (càd qu'il y a mobilité parfaite du travail entre secteurs et zones d'activités); on le note w_{qual}. L'efficacité de h au travail dépend cependant de la localisation de son logement (fatigues et retards dus aux longs déplacements, grèves des transports etc) de sorte que le salaire qu'il perçoit par unité de travail $qual$ offert à partir de la zone z est $e^{A_z} w_{qual}$ ($z = 1, \ldots, Z$) où e^{A_z} est un indice d'efficacité qui reflète l'accessibilité moyenne de sa zone d'habitation z, indice dont *Pirandello* offre une expression

[11] La désagrégation du travail par type de qualification n'est peut-être pas la plus pertinente du point de vue de l'urbanisme et des autorités régionales. Elle est donnée ici à titre illustratif, la méthodologie pouvant s'appliquer à n'importe quel critère de désagrégations, les types de professions par exemple.

élaborée qui peut être utilisée ici, et qui deviendra par conséquent endogène dans le modèle d'équilibre général. Puisque l'individu représentatif d'une classe de ménages consomme du logement dans chaque zone, son offre de travail est répartie à travers les zones conformément à son choix d'habitation; la quantité de travail qu'il offre à partir de la zone z s'écrit donc $\wp_{h,z}^{hab} l_{h,qual}$ où $\wp_{h,z}^{hab}$ est la proportion de sa consommation totale de logement qui est située dans la zone z (obtenu par sommation à partir des $\wp_{h,i}^{hab}$); le revenu qu'il perçoit de son travail de type $qual$ est $\sum_{z}^{Z} e^{A_z} w_{qual} \wp_{h,z}^{hab} l_{h,qual}$ et sa rémunération moyenne par type de qualification (telle que prise en compte dans (2.16)) s'écrit:

(2.17) $\varpi_{h,qual} = \sum_{z}^{Z} e^{A_z} w_{qual} \wp_{h,z}^{hab}$.

Les revenus totaux perçus du travail --tels qu'ils apparaissent dans la contrainte budgétaire (2.1) --sont alors directement obtenus par sommation sur les qualifications:

(2.18) $inc_h^{Lab} = \sum_{qual} \varpi_{h,qual} l_{h,qual}$.

3. <u>Les firmes</u>

Il y a S secteurs d'activités, indicés $s, s' = 1, \cdots, S$. Les technologies sont à rendements constants d'échelle, et le jeu compétitif parfaitement concurrentiel, de sorte que chaque secteur peut être modélisé sous la forme d'une firme unique dont le prix est déterminé par le coût marginal de production, et les quantités produites fixées par le volume de la demande. On omet l'indice du secteur lorsqu'aucune confusion ne résulte. Toutes les décisions des firmes portent sur la même période, de sorte que toutes les variables sont indicées t : on peut dès lors aussi, dans cette section, négliger l'indice de temps afin d'alléger l'écriture.

Pour produire un output Q, la firme combine des facteurs de production, terre, capital, travail (différencié par type de qualification) et espace (différencié entre "espace bureau" et "espace présentiel", chacun étant par ailleurs différencié par "zone" de localisation et "taille") ainsi que des inputs intermédiaires.

Une structure technologique particulière est proposée dans la figure 2 à titre illustratif.[12] Ici, VA représente la valeur ajoutée; X est la demande d'un composite d'inputs intermédiaires combinant des

[12] Cette structure peut évidemment être aisément modifiée en fonction des caractéristiques des secteurs, (a) par des "restrictions zéro" sur certains coefficients (par ex la plupart des secteurs n'utilisent pas de terre de sorte que $TAgri^{dem} = 0$ pour ces secteurs); (b) par le choix des élasticités de substitution (dans certains secteurs l'élasticité capital-travail peut-être élevée, alors que dans d'autres, du fait d'une très grande automatisation du processus de production, le travail est nécessaire à l'opération des machines et donc complémentaire au capital).

biens d'autres secteurs ($X_{s'}$);[13] $\kappa^K K^{dem}$ est la demande de service de capital; Fac est la demande d'un composite factoriel combinant Lab et Esp; Lab est la demande d'un composite de travail combinant différentes qualifications en quantité L_{qual}^{dem}; Esp est la demande d'espace combinant espace bureau (Esp^{Bur}) et espace présentiel ($Esp^{Prés}$). La demande de ces deux types d'espace résulte d'un choix discret multinomial logit à deux niveaux sur une partition "zone" (au niveau supérieur) et "taille" (au niveau inférieur) qui constitue déjà un autre bloc important du modèle *Pirandello*. Dans la figure 2, sont indiqués entre parenthèses les coûts marginaux des différents composites (indiqués par le symbole λ) ainsi que les prix de marchés des autres inputs sur lesquels la firme n'a pas d'influence (w^{TAgri}, w^K, w_{qual}, w_i^{Bur}, $w_i^{Prés}$, $p_{s'}^{Arm}$). En absence de fiscalité indirecte (taxes sur les produits; on peut lever cette hypothèse de façon évidente) on aura que

(3.1) $$p_t^Q = \lambda_t^Q$$

du fait qu'en concurrence parfaite, la firme ne fait pas de surprofit. Tous les composites sauf Esp^{Bur} et $Esp^{Prés}$ sont supposés produits à l'aide de technologies CES à rendements constants d'échelle, et les combinaisons optimales d'inputs se font par minimisation des coûts. Afin de ne pas alourdir le texte, et compte tenu du fait que cette structure technologique est seulement illustrative, nous ne reprenons pas ici ces équations.

Les demandes Esp^{Bur} et $Esp^{Prés}$ résultent de [l'agrégation] des choix discrets faits [par les firmes individuelles du secteur] sur une partition "zones" (en nombre Z) et "tailles" (en nombre T) sous l'hypothèse de multinomiale logit à deux niveaux. Les firmes individuelles du secteur d’activité considéré ont donc le choix entre $I = Z \text{ x } T$ alternatives indicées $i = 1, \cdots, I$. A chaque alternative sont associés des composantes communes à l'ensemble des firmes du secteur regroupées dans les termes $\tilde{v}_i^{Bur}$ et $\tilde{v}_i^{Prés}$, ainsi qu’un terme spécifique à chaque firme η_i^f. La composante déterministe de la valorisation dépend des avantages endogènes liés à l’accessibilité --dont *Pirandello* offre une modélisation très élaborée qui peut être greffée ici-- ainsi que des coûts associés à l'option (les termes en w_i et $\overline{tx}_i$ représentant les loyers et taxes associés à l'option i ; les θ_i sont des constantes), soit:

(3.2) $$\begin{aligned} \tilde{v}_i^{Bur} &= \theta_i^{Bur} + v_i^{Bur(access)} - \left(w_i^{Bur} + \overline{tx}_i^{Bur} \right) \\ \tilde{v}_i^{Prés} &= \theta_i^{Prés} + v_i^{Prés(access)} - \left(w_i^{Prés} + \overline{tx}_i^{Prés} \right) \end{aligned}$$

On suppose les termes idiosyncratiques η_i^f des réalisations de variables aléatoires identiquement distribuées Gumbel, avec une structure de corrélation correspondant à l'hypothèse de multinomiales

[13] La matrice des $X_{s,s'}$ en valeur constitue le T.E.I. (tableau des échanges interindustriels).

logit imbriquées. De cette optimisation résulte la structure par zone et taille de ces deux paniers, déterminées par les probabilités de choix $\wp_i^{Esp^{Bur}}$ et $\wp_i^{Esp^{Prés}}$, et les quantités demandées de chaque type d'espaces esp_i^{Bur} et $esp_i^{Prés}$. Comme déjà indiqué, la composante "choix discret" du ménage est intégralement reprise de *Pirandello*; en équilibre général cependant, les loyers --ainsi sans doute que certaines variables qui interviennent dans les valorisations d'accessibilités-- sont endogénéisés en équilibre général. Formellement, ces quantités demandées s'écrivent:

(3.3) $$esp_i^{Bur} = \wp_i^{Esp^{Bur}} Esp^{Bur} \quad ; \quad esp_i^{Prés} = \wp_i^{Esp^{Prés}} Esp^{Prés} \; ;$$

Les coûts unitaires des paniers agrégés sont des moyennes pondérées des loyers plus taxes, pondérées par les probabilités:

(3.4) $$\lambda^{Esp^{Bur}} = \sum_i^I \wp_i^{Esp^{Bur}} \left(w_i^{Bur} + \overline{tx}_i^{Bur} \right) \quad ; \quad \lambda^{Esp^{Prés}} = \sum_i^I \wp_i^{Esp^{Prés}} \left(w_i^{Prés} + \overline{tx}_i^{Prés} \right).$$

Enfin la contrainte budgétaire est satisfaite par construction, qui détermine le volume des demandes des paniers agrégés Esp^{Bur} et $Esp^{Prés}$:

(3.5) $$\lambda^{Esp^{Bur}} Esp^{Bur} = \sum_i^I \left(w_i^{Bur} + \overline{tx}_i^{Bur} \right) esp_i^{Bur} \quad ; \quad \lambda^{Esp^{Prés}} Esp^{Prés} = \sum_i^I \left(w_i^{Prés} + \overline{tx}_i^{Prés} \right) esp_i^{Prés} .$$

Une fois Q connu --déterminé par la demande-- on peut donc déterminer, par les équations de demandes dérivées des conditions du premier ordre de la minimisation des coûts, le volume requis de chaque intrant.

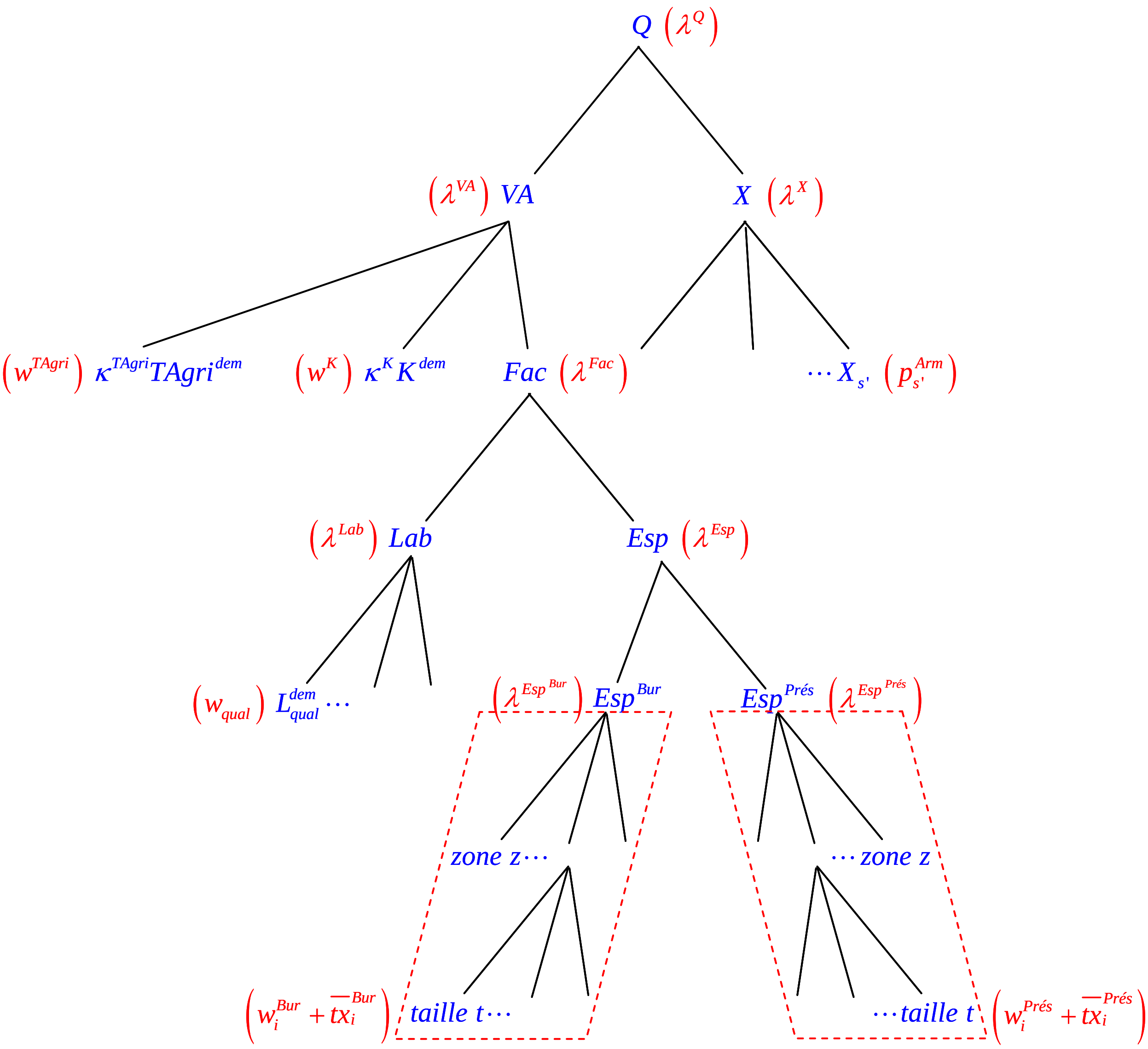
4. Formation brute de capital fixe et construction immobilière

Une unité d'investissement résulte d'un assemblage de biens à partir d'une technologie que l'on peut supposer de type CES: $Inv = \mathrm{CES}(\cdots, inv_s, \cdots)$, où Inv est le volume de la formation brute de capital fixe au cours de la période (déterminé par (1.13)), et inv_s est la demande de biens s à des fins d'investissement (toutes les variables sont indicées t dans cette section de sorte que l'on néglige l'indice du temps). La minimisation des coûts permet de déterminer le niveau de ces demandes, ainsi que λ^{Inv}, le coût unitaire du bien d'investissement, en fonction des prix de marchés des composants p_s^{Arm} :

(4.1) $$\begin{cases} inv_s = \mathrm{inv}_s\left(\dfrac{\lambda^{Inv}}{p_s^{Arm}} \right) . \, Inv \\ \lambda^{Inv} = \lambda^{\mathrm{Inv}}(\cdots, p_s^{Arm}, \cdots) . \end{cases}$$

On suppose que la valorisation par le marché d'une unité installée de capital fixe est égale à son coût

Figure 3: Exemple de structure technologique de la firme.



de remplacement; càd :

(4.2) $\quad p^{K} = \lambda^{Inv}$.

De la même façon, on détermine le coût de l'investissement immobilier, et sa composition optimale:

(4.3) $$\begin{cases} inv_s^{Imm} = \mathrm{inv}_s^{Imm}\left(\dfrac{\lambda^{Inv^{Imm}}}{p_s^{Arm}}\right) . Inv^{Imm} \\ \lambda^{Inv^{Imm}} = \lambda^{\mathrm{Inv}^{\mathrm{Imm}}}(\cdots, p_s^{Arm}, \cdots) \end{cases}$$

et on pose:

(4.4) $\quad p^{Inv^{Imm}} = \lambda^{Inv^{Imm}}$.

5. Offre de logements, d'espaces bureaux et présentiels

Dans cette section encore, toutes les variables sont indicées t de sorte que l'on peut négliger l'indice du temps pour alléger l'écriture. Si le stock immobilier Imm est donné en début de période, ainsi que sa répartition entre zones et tailles, son allocation entre logements des particuliers et espaces destinés aux entreprises est susceptible de réagir aux changements relatifs des loyers w_i^{Hab}, w_i^{Bur}, $w_i^{Prés}$ ($i = 1, \cdots, I$). On supposera cette allocation faite de façon à maximiser le revenu des propriétaires sous contrainte d'une fonction à élasticité de transformation constante (CET) à deux niveaux: le premier niveau partage le parc disponible entre habitations et espace aux entreprises: $Imm_i = \mathrm{CET}(Imm_i^{Hab}, Imm_i^{Esp})$; le second niveau partage Imm_i^{Esp} entre espaces bureaux et présentiels:

$Imm_i^{Esp} = \mathrm{CET}(Imm_i^{Esp^{Bur}}, Imm_i^{Esp^{Prés}})$.

En maximisant les revenus locatifs $w_i^{Hab} Imm_i^{Hab} + w_i^{Bur} Imm_i^{Esp^{Bur}} + w_i^{Prés} Imm_i^{Esp^{Prés}}$, pour chaque i, sous contraintes de transformation et de disponibilité de ressources, on peut déterminer les offres sur les différents marchés locatifs:

$$(5.1) \quad \begin{cases} Imm_i^{Hab} = \mathrm{Imm}_i^{\mathrm{Hab}}\left(w_i^{Hab}, w_i^{Bur}, w_i^{Prés}\right) \\ Imm_i^{Esp^{Bur}} = \mathrm{Imm}_i^{\mathrm{Esp}^{\mathrm{Bur}}}\left(w_i^{Hab}, w_i^{Bur}, w_i^{Prés}\right) \\ Imm_i^{Esp^{Prés}} = \mathrm{Imm}_i^{\mathrm{Esp}^{\mathrm{Prés}}}\left(w_i^{Hab}, w_i^{Bur}, w_i^{Prés}\right) \\ Imm_i = Imm_i^{Hab} + Imm_i^{Esp^{Bur}} + Imm_i^{Esp^{Prés}} \end{cases}$$

On pourra dès lors déterminer le loyer moyen perçu sur l'actif immobilier, tel qu'il apparaît dans les contraintes budgétaires des ménages et dans leurs choix de portefeuilles:

$$(5.2) \quad \varpi^{Imm} = \sum_i^I \frac{w_i^{Hab} Imm_i^{Hab} + w_i^{Bur} Imm_i^{Esp^{Bur}} + w_i^{Prés} Imm_i^{Esp^{Prés}}}{Imm_i}$$

6. Les pouvoirs publics

On peut supposer fixe la structure sectorielle de la consommation publique réelle Gov_t --càd que les pouvoirs publics ont des préférences Leontieff (voir annexe), de sorte que:

$$(6.1) \quad \begin{cases} gov_{s,t} = \gamma_s Gov_t \qquad \sum_s^S \gamma_s = 1 \\ \lambda_t^{Gov} = \sum_s^S \gamma_s p_{s,t}^{Arm} \end{cases}$$

où $gov_{s,t}$ est la demande de biens au secteur s par les pouvoirs publics à des fins de consommation, et λ_t^{Gov} l'indice des prix de la consommation publique. On suppose, sans perte de généralité (il s'agit d'une simple normalisation), que le prix p_t^{Gov} d'un bon public à l'émission est égal à λ_t^{Gov} :

(6.2) $p_t^{Gov} = \lambda_t^{Gov}$.

La contrainte budgétaire des pouvoirs publics en t s'écrit alors:

(6.3) $$p_t^{Gov} B_{t+1}^{Gov} + \sum_h^H \overline{tx}_{h,t}^{Inc} Pop_{h,t} + \sum_i^I \sum_h^H \overline{tx}_{i,t}^{Hab} hab_{h,i,t} Pop_{h,t} + \sum_i^I \sum_s^S \left[\overline{tx}_{i,t}^{Bur} esp_{s,i,t}^{Bur} + \overline{tx}_{i,t}^{Prés} esp_{s,i,t}^{Prés} \right] = p_t^{Gov} Gov_t + \left(1 + r_{t-1}^{Gov}\right) p_{t-1}^{Gov} B_t^{Gov}$$

Le membre de droite évalue les ressources nécessaires aux pouvoirs publics pour couvrir leurs dépenses de consommation et faire face à leurs engagements sur les marchés financiers; le membre de gauche détaille le mode de financement de ces dépenses. Cette équation détermine donc le stock de bons B_{t+1}^{Gov} émis au cours de la période t par les pouvoirs publics.

En supposant les taux de taxation exogènes, la stationnarité de la dette en t_2 impose aux pouvoirs publics une contrainte sur le niveau de leurs dépenses de consommation Gov_{t_2} ; on pourra soit supposer la consommation publique de première période exogène, et laisser $B_{t_2}^{Gov}$ s'ajuster, soit l'inverse.

7. Le reste du monde

Une partie de la production d'IdF est exportée ailleurs en France ou à l'étranger (exportée donc à ce que nous appelons le Rdm), et une partie des demandes finale et intermédiaires sont importées du Rdm. L'IdF est trop petite pour influencer le prix des biens étrangers qu'il est commode de choisir comme numéraires:

(7.1) $p_{s,t}^{Rdm} = 1$.

- ***Les importations***

Du simple fait de l'agrégation sectorielle, un bien s produit en IdF n'est pas identique à un bien s produit hors IdF: les deux sont des substituts imparfaits du point de vue des demandeurs, et ils ont des prix différents. On supposera que tous les demandeurs privés locaux les différencient de la même façon (on pourrait aisément relâcher cette hypothèse) de sorte qu'est disponible sur le marché local, aussi bien aux ménages (pour leurs consommations et leurs investissements) qu'aux entreprises (pour leurs intrants matériels) et qu'aux pouvoirs publics locaux, un seul bien composite, qui combine le bien produit localement et le bien importé.[14] La demande agrégée pour ce bien composite est dès lors

(7.2) $$Dem_{s,t}^{Arm} = \sum_{h}^{H} con_{h,s,t}\overline{Pop}_{h,t} + inv_{s,t} + inv_{s,t}^{Imm} + \sum_{s'}^{S} X_{s,s',t} + gov_{s,t}$$

et son prix est noté $p_{s,t}^{Arm}$. C'est un composite CES: $Dem_{s,t}^{Arm} = \mathrm{CES}(Dem_{s,t}^{Dom}, Dem_{s,t}^{Imp})$ des biens produits domestiquement (volume de la demande: $Dem_{s,t}^{Dom}$, prix unitaire: $p_{s,t}^{Q}$) et importés (volume de la demande : $Dem_{s,t}^{Imp}$, prix unitaire: $p_{s,t}^{Imp}$), dont la composition est déterminée par minimisation des coûts. On obtient:

(7.3) $$\begin{cases} Dem_{s,t}^{Dom} = \mathrm{Dem}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{Dom}}\left(\dfrac{\lambda_{s,t}^{Arm}}{p_{\mathrm{s,t}}^{Q}}\right) Dem_{s,t}^{Arm} \\ Dem_{s,t}^{Imp} = \mathrm{Dem}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{Imp}}\left(\dfrac{\lambda_{s,t}^{Arm}}{p_{\mathrm{s,t}}^{Imp}}\right) Dem_{s,t}^{Arm} \\ \lambda_{s,t}^{Arm} = \lambda_{\mathrm{s}}^{\mathrm{Arm}}(p_{s,t}^{Q}, p_{s,t}^{Imp}) \end{cases}$$

On exclut la possibilité que cette activité génère des profits, et on pose

(7.4) $$p_{s,t}^{Arm} = \lambda_{s,t}^{Arm}$$

et en absence de droits de douane (ou d'autres coûts pouvant grever les prix des biens étrangers importés), on pose

(7.5) $$p_{s,t}^{Imp} = p_{s,t}^{Rdm}.$$

- ***La contrainte budgétaire du Rdm et les exportations***

Le Rdm doit satisfaire la contrainte budgétaire suivante:

(7.6) $$p_t^{Rdm} B_{t+1}^{Rdm} + \sum_{s}^{S} p_{s,t}^{Imp} Dem_{s,t}^{Imp} = p_t^{Exp} Exp_t + \left(1 + r_{t-1}^{Rdm}\right) p_{t-1}^{Rdm} B_t^{Rdm}\ .$$

La valeur totale des exportations de l'IdF est $p_t^{Exp} Exp_t$. On suppose que les firmes locales pratiquent les mêmes prix de vente sur les marchés locaux et étrangers, de sorte que:

(7.7) $$p_t^{Exp} = p_t^{Q}.$$ [15]

On pourra raisonnablement supposer que les parts sectorielles sont constantes en valeur dans les exportations (càd que le Rdm a des préférences Cobb-Douglas: voir annexe) de sorte que

[14] Ce bien est appelé "bien composite d'Armington" dans la littérature sur le commerce international.

[15] Dans certains secteurs, les firmes pourraient trouver avantageux, de destiner une fraction de leur production spécifiquement à l'exportation plutôt qu'au marché local, en pratiquant des prix différents. L'allocation se fait alors de façon optimale compte tenu des prix relatifs sur les deux marchés (local, du Rdm) ainsi que des coûts d'ajustements implicites (changer de clientèle est coûteux) à l'aide d'une fonction CET. On négligera cette possibilité ici.

(7.8) $p_{s,t}^{Q} exp_{s,t} = \alpha_s^{Exp} p_t^{Exp} Exp_t \qquad \sum_{s}^{S} \alpha_s^{Exp} = 1$.

La stationnarité en t_2 impose une contrainte sur Exp_{t_2} ; pour la première période, on peut supposer endogène soit $B_{t_2}^{Rdm}$ soit Exp_{t_1}. Les termes de l'échange de l'IdF sont endogènes, variables dans le temps, et égaux à p_t^{Exp}.

8. Agrégation des portefeuilles d'actifs

Toutes les variables dans cette section sont indicées t et on néglige cet indice.

- Les avoirs sur le Rdm

(8.1) $\sum_{h}^{H} b_h^{Rdm} \overline{Pop}_h = B^{Rdm}$

- Les avoirs sur les pouvoirs publics

(8.2) $\sum_{h}^{H} b_h^{Gov} \overline{Pop}_h = B^{Gov}$

- Les avoirs en capital

(8.3) $\sum_{h}^{H} k_h \overline{Pop}_h = K$

- Les avoirs immobiliers

(8.4) $\sum_{h}^{H} imm_h \overline{Pop}_h = Imm$

- Les avoirs fonciers

(8.5) $\sum_{h}^{H} tagri_h \overline{Pop}_h = TAgri$

(8.6) $\sum_{h}^{H} tàbât_h \overline{Pop}_h = TàBât$

9. Les marchés

Toutes les variables sont indicées t et on néglige cet indice.

- Les biens

(9.1) $Q_s = Dem_s^{Dom} + exp_s \qquad (s = 1, \cdots, S)$

- Les services de facteur capital

(9.2) $K = \sum_{s}^{S} K_s^{dem}$

- Les services de facteur travail par types de qualification

(9.3) $\sum_{h}^{H} \sum_{z}^{Z} \wp_{h,z} l_{h,qual} e^{A_z} \overline{Pop}_h = \sum_{s}^{S} L_{qual,s}^{dem} \qquad (qual = 1, \cdots, Qual)$

- Les services de logement

(9.4) $Imm_i^{Hab} = \sum_{h}^{H} hab_{h,i} \overline{Pop}_h \qquad (i = 1, \cdots, I)$

- Les services d'espace bureau

(9.5) $Imm_i^{Esp^{Bur}} = \sum_{s}^{S} esp_{s,i}^{Bur} \qquad (i = 1, \cdots, I)$

- Les services d'espace présentiel

(9.6) $Imm_i^{Esp^{Prés}} = \sum_{s}^{S} esp_{s,i}^{Prés} \qquad (i = 1, \cdots, I)$

- Les services du facteur terre

(9.6) $TAgri + TàBât = \sum_{s}^{S} TAgri_s^{dem}$

10. L'évolution des stocks

- L'endettement du Rdm

  Voir (7.6)

- L'endettement des pouvoirs publics locaux

  Voir (6.3)

- Le stock de capital

  Voir (1.13)

- Le parc immobilier

(10.1) $Imm_{t+1} = Imm_t + Inv_t^{Imm}$

- Le stock des terres agricoles non constructibles

(10.2) $TAgri_{t+1} = (1 - \delta_t^{TAgri})\ TAgri_t$

où δ_t^{TAgri} est le pourcentage des terres agricoles converties en terrain à bâtir par décision des maires. (Le modèle *Pirandello* propose un module comportemental des maires qui peut se greffer ici.)

- Le stock des terres agricoles à bâtir

(10.3) $TàBât_{t+1} = TàBât_t + \delta_t^{TAgri}\ TAgri_t - Inv_t^{Imm}$

11. L'évaluation des effets sur le bien-être

L'évaluation de l'effet sur le bien-être des ménages des décisions prises par les pouvoirs publics implique, pour chaque h, une comparaison entre une trajectoire de référence, et la trajectoire simulée après implémentation du choc. Notons $\left\{\hat{u}_{h,t'}\right\}_{t'=t}^{\infty}$ la trajectoire initiale de la félicité de h qui sert de référence (trajectoire que nous supposons par ailleurs stationnaire), et $\left\{u_{h,t'}\right\}_{t'=t}^{\infty}$ la trajectoire simulée. Le gain de bien-être est mesuré par le paramètre φ_h déterminé par la condition d'indifférence suivante:

$$(11.1)\quad \sum_{t'=t}^{\infty}\beta^{t'-t}\frac{\left[\hat{u}_{h,t'}(1+\varphi_h)\right]^{1-1/\sigma^U}}{1-1/\sigma^U}=\sum_{t'=t}^{\infty}\beta^{t'-t}\frac{u_{h,t'}{}^{1-1/\sigma^U}}{1-1/\sigma^U}\ .$$

φ_h mesure le pourcentage de félicité additionnel qu'il faudrait donner au ménage sur l'ensemble de l'horizon pour qu'il soit indifférent entre sa situation initiale et celle d'après l'implémentation de la politique: une valeur positive de ce paramètre indique une amélioration de bien-être (puisqu'il faudrait compenser le ménage pour qu'il soit prêt à renoncer à sa nouvelle situation). Ce critère prend en compte aussi bien les effets de court terme (transitoires) que les effets de long terme (permanents).

On pourrait choisir de ne s'intéresser qu'aux effets bien-être de long terme (par ex à des fins de comparaison avec les évaluations faites à l'aide de modèles statiques). Pour cela, définissons $\lim_{t'\to\infty} u_{h,t'}=u_{h,\infty}$ et $\lim_{t'\to\infty}\hat{u}_{h,t'}=\hat{u}_{h,\infty}$. En substituant $u_{h,\infty}$ pour $u_{h,t'}$ et $\hat{u}_{h,\infty}$ pour $\hat{u}_{h,t'}$ dans le critère d'indifférence, on obtient:

$$(11.2)\quad u_{h,\infty}(1+\varphi_{h,\infty})=\hat{u}_{h,\infty}$$

qui est la mesure des effets bien-être utilisée dans les modèles statiques.

Section 4 : Quelques extensions possibles

4.1 L'endogénéisation de l'offre de travail

Le ménage représentatif a été supposé détenir une quantité fixe l_h qu'il loue aux entreprises. La modélisation des réactions de l'offre de travail aux fluctuations d'activités est un élément essentiel de la modélisation macroéconomique moderne. Deux approches sont possibles. La première consiste à introduire l'arbitrage travail-loisir dans le problème d'optimisation intertemporelle en modifiant (2.5) par exemple comme suite:

$$(2.5') \quad U_{h,t} = \sum_{t'=t}^{\infty} \beta^{t'-t} \left(\frac{u_{h,t'}{}^{1-1/\sigma^U}}{1-1/\sigma^U} + \varphi \frac{\ell_{h,t'}{}^{1-1/\tilde{\sigma}^U}}{1-1/\tilde{\sigma}^U} \right) \qquad \tilde{\sigma}^U \neq \sigma^U$$

ou $\ell_{h,t'}$ est la quantité consommée de loisir par l'individu représentatif tel que $l_{h,t} + \ell_{h,t} \leq 1$. Ainsi, le ménage module son offre de travail courante en fonction des changements futurs anticipés des salaires (en avançant ou retardant ses décisions de procréation par ex). La seconde approche consiste à introduire le loisir dans la félicité, et à traiter le loisir comme une consommation au même titre que les biens et de logement: $u_h = \mathrm{CES}(con_{h\cdot}, hab_{h\cdot}, \ell_{h\cdot})$. L'avantage de cette seconde approche est qu'elle permet une approche "choix discret" de l'offre de travail et une exploitation économétrique des immenses banques de données microéconomiques disponibles aujourd'hui.[16] Réconcilier ces deux approches n'est malheureusement pas aisée: voir Keane et Rogerson (2012), et la seconde est sans doute mieux adaptée à nos préoccupations dans le cadre de ce travail.

4.2 La création d'emplois et l'endogénéisation du chômage

Le modèle impose le plein emploi du facteur travail, et détermine les salaires en conséquence. Ceci signifie, en particulier, que les gains éventuels de productivités induits par les investissements publics seront convertis en hausses de salaires pour ceux qui travaillent, et pas en création d'emplois: le taux de chômage est exogène et les chômeurs d'aujourd'hui sont traités comme si ils étaient irrémédiablement sortis du marché du travail. Ce n'est sans doute pas le cas pour une fraction d'entre eux, et on peut espérer que les entreprises réussiront à partager ces gains de productivités entre hausses salariales et embauches de nouveaux travailleurs. Techniquement, le modèle permet cela sans aucune difficulté. Il suffit d'exogénéiser le niveau des salaires et de laisser libre l_h dont le niveau sera déterminé par la demande de travail des entreprises (la condition (9.3) devra cependant être complétée par une clef de répartition entre classes de ménages de ces éventuelles créations d'emplois). La difficulté n'est donc

[16] Voir par Magnani-Mercenier (2009) pour une illustration.

pas technique, mais bien conceptuelle: à quel niveau choisir de fixer les salaires? Une possibilité intéressante (voir par ex Mercenier, 1995) consiste à indexer les salaires nominaux sur l'indice du coût de la vie, de sorte qu'aucun travailleur ne gagne ni ne perde, le surplus des gains de productivités étant affectés à la création de nouveaux emplois. Cette approche n'est cependant pas directement applicable ici du fait de l'hétérogénéité des ménages: chaque classe de ménage a son propre panier de consommation, et donc un indice spécifique du coût de la vie (λ_h^u).

4.3 Les migrations et l'endogénéisation de la taille/structure de la population

En affectant l'attractivité de la région IdF, les investissements publics d'infrastructure sont susceptibles d'initier des mouvements migratoires (endogénéisation de $\overline{Pop}_h$), et partant de changer la démographie de la région. Une augmentation des salaires et/ou la création d'emplois attirera des travailleurs en IdF; cet afflux de population induira sans doute une hausse des loyers qui incitera une population âgée donc moins dépendante du marché du travail à quitter l'IdF... Pour capter ces effets, une distinction entre classes d'âge devrait être introduite chez les ménages (au moins distinguer jeunes/étudiants, travailleurs, retraités).

Références

Anderson, S., A. de Palma & J-F. Thisse.: *Discrete Choice Theory of Product Differentiation*. MIT Press: Cambridge (1992).

Delons J., N. Coulombel. & F. Leurent: PIRANDELLO: an Integrated Transport and Land-Use Model for the Paris Area. Paper presented at the *Annual Meeting of the Transportation Research Board*, Washington (2009).

Gorman, W.M.: Separable utility and aggregation. *Econometrica* 27, 469-481 (1959)

Keane, M. & R. Rogerson: Micro and Macro Labor Supply Elasticities: A Reassessment of Conventional Wisdom. *Journal of Economic Literature* 50(2), 464-476 (2012).

Kryvobokov M., J.-B. Chesneau, A. Bonnafous, J. Delons & V. Piron : Comparison of the Static and Dynamic Land-Use – Transport Interaction Models : the Pirandello and UrbanSim applications. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, No. 2344, Transportation Research Board of the National Academies, Washington (2013).

Magnani, R. & J. Mercenier: On Linking Microsimulation and Computable General Equilibrium Models Using Exact Aggregation of Heterogeneous Discrete-choice Making Agents. *Economic Modelling* 26(3), 560-570 (2009).

Mercenier, J.: Can '1992' Reduce Unemployment in Europe? On Welfare and Employment Effects of Europe's Move to a Single Market. *Journal of Policy Modeling* 17(1), 1-37 (1995).

Annexe : Quelques rappels sur les préférences/technologies utilisées

La fonction CES, homogène de degré un:

$$u = \left[\sum_s^S \alpha_s c_s^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \quad \rho \geq -1 \quad \alpha_s > 0$$

Il est facile de montrer que l'élasticité de substitution est bien constante et liée au paramètre ρ :

$$\sigma = \frac{d\log(c_s / c_{s'})}{d\log(p_{s'} / p_s)} = \frac{1}{1+\rho} \geq 0$$

Par minimisation des coûts sous contrainte d'iso-utilité, on obtient immédiatement le système de demande suivant:

$$\begin{cases} c_s = \alpha_s^\sigma \left[\dfrac{\lambda}{p_s}\right]^\sigma u \\ \lambda^{1-\sigma} = \sum_s^S \alpha_s^\sigma p_s^{1-\sigma} \end{cases}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange. On voit que ces préférences sont homothétiques, puisque:

$$\frac{c_s}{c_{s'}} = \frac{\alpha_s^\sigma}{\alpha_{s'}^\sigma}\left[\frac{p_{s'}}{p_s}\right]^\sigma$$

est indépendant du niveau de u .

- ***La fonction Cobb-Douglas, homogène de degré un:***

$$u = \prod_s^S c_s^{\alpha_s} \quad \text{avec} \quad \sum_s^S \alpha_s = 1$$

Il est facile de montrer que l'élasticité de substitution est constante et égale à l'unité:

$$\sigma = \frac{d\log(c_s / c_{s'})}{d\log(p_{s'} / p_s)} = 1$$

La Cobb-Douglas est donc bien un cas particulier de CES. Par minimisation des coûts, on obtient immédiatement le système de demande suivant:

$$\begin{cases} p_s c_s = \alpha_s \ \lambda u \\ \lambda = \prod_s^S p_s^{\alpha_s} \end{cases}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'iso-utilité. On voit qu'avec ces préférences, les parts budgétaires restent constantes.

- ***La fonction Leontieff (ou: à complémentarité d'intrants) homogène de degré un***

$$u = \frac{c_s}{\alpha_s} \ \forall s \quad \text{avec} \quad \sum_s^S \alpha_s = 1$$

Il est facile de vérifier que l'élasticité de substitution est constante et égale à zéro:

$$\sigma = \frac{d\log(c_s / c_{s'})}{d\log(p_{s'} / p_s)} = 0$$

La Leontieff est donc aussi un cas particulier de CES. Par minimisation des coûts sous contrainte d'iso-utilité, on obtient immédiatement le système de demande suivant:

$$\begin{cases} c_s = \alpha_s u \\ \lambda = \sum_s^S \alpha_s p_s \end{cases}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'iso-utilité.